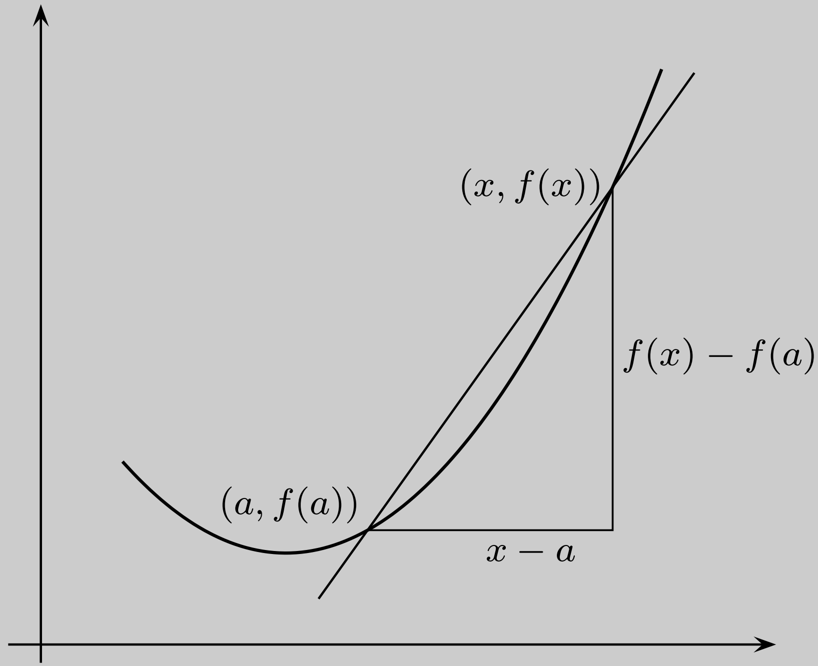
Derivadas

Secantes y tangentes

Supongamos que queremos hallar la tangente a una curva de ecuación cartesiana $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$. En principio, parece que nos falta un dato ya que una recta no queda determinada por un solo punto. Para determinar una recta necesitamos dos puntos o un punto y la pendiente. La estrategia consiste en aproximar la tangente por rectas secantes cuyas pendientes sí pueden calcularse directamente.



Una recta secante

Tangente a una curva

En particular, consideremos la recta que une el punto $(a, f(a))$ con un punto cercano, $(x, f(x))$, de la gráfica de f. Esta recta se llama una secante (recta que corta a la curva, pero no es tangente a la curva). La pendiente de esta secante es:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Cuando el punto x se aproxima *"infinitamente"* al punto a, la pendiente de la tangente vendrá dada por:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Razón de cambio promedio

Muchas leyes de la Física, la Química, la Biología o la Economía, son funciones que relacionan una variable "dependiente" y con otra variable "independiente" x, lo que suele escribirse en la forma $y = f(x)$. Si la variable independiente cambia de un valor inicial a a otro x, la variable y lo hace de $f(a)$ a $f(x)$. La *razón de cambio promedio de* $y = f(x)$ *con respecto a* x *en el intervalo* $[a, x]$ es:

$$\text{Razón de cambio promedio} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Razón de cambio puntual

Con frecuencia interesa considerar la razón de cambio en intervalos cada vez más pequeños. Esto lleva a definir lo que podemos llamar "*razón de cambio puntual de $y = f(x)$ con respecto a x en el punto a*" como:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Derivada de una función en un punto

Se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es **derivable en un punto** $a \in I$, si existe el límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Dicho límite se llama **derivada de** f **en** a y lo representaremos por $f'(a)$ (notación debida a Lagrange). El límite anterior se puede escribir también de la forma:

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

Función derivada

Dada una función $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en todo punto de I, la **función derivada** de f es la función $f' : I \to \mathbb{R}$ que a cada punto $x \in I$ hace corresponder la derivada de f en dicho punto.

La derivabilidad de f en un punto $a \in I$ es una *propiedad local*, depende solamente del comportamiento de f en los puntos de I próximos al punto a. Concretamente, si J es cualquier *intervalo abierto* que contiene el punto a, se verifica que f es derivable en a si, y sólo si, la función restricción $f_{|I \cap J}$ es derivable en a y, por supuesto, en tal caso ambas funciones tienen la misma derivada en a.

Toda función derivable en un punto es continua en dicho punto.

La notación $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ para representar la derivada de f en x es debida a Leibniz.

Rectas tangente y normal

Supuesto que f es derivable en a, la recta de ecuación cartesiana:

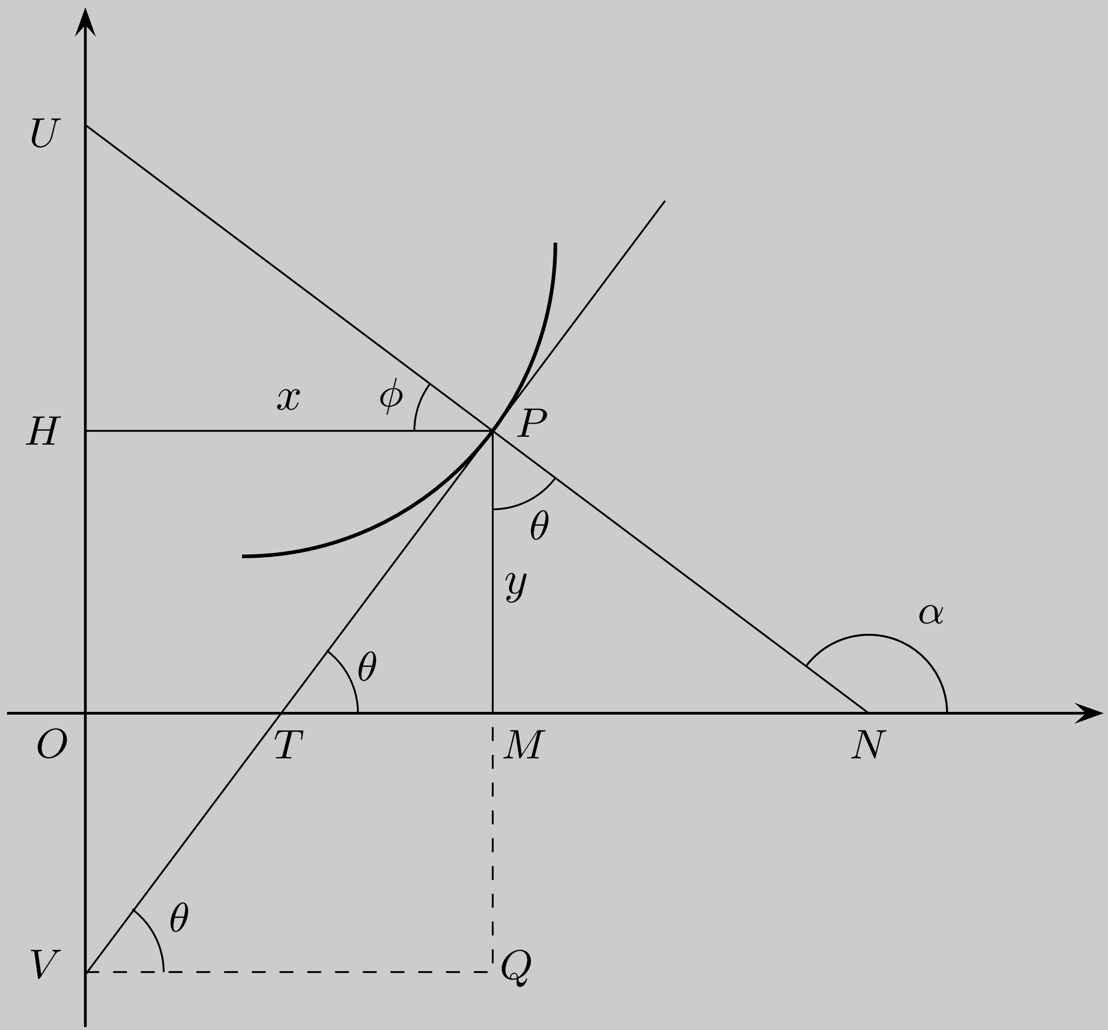
$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x - a)}$$

se llama **recta tangente** a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$, y también recta tangente a f en $x = a$.

Cuando $f'(a) \neq 0$, la recta de ecuación:

$$\boxed{y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a)}$$

es la **recta normal** a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$, y también recta normal a f en $x = a$



Elementos de una curva relacionados con la derivada

- La pendiente de la tangente es $\operatorname{tg}(\theta) = y'$.
- La pendiente de la normal es $\operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{tg}(\pi/2 + \theta) = -1/y'$.
- El segmento $\overline{TM}$ es la **subtangente**. Su longitud viene dada por $\overline{TM} = y \operatorname{cotg}(\theta) = y/y'$.
- El segmento $\overline{MN}$ es la **subnormal**. Su longitud viene dada por $\overline{MN} = y \operatorname{tg}(\theta) = yy'$.
- Los segmentos interceptados en los ejes OX y OY por la tangente son

$$\begin{cases} \overline{OT} = \overline{OM} - \overline{TM} = x - y/y' \\ \overline{OV} = \overline{PM} - \overline{PQ} = y - x \operatorname{tg}(\theta) = y - xy' \end{cases}$$

- Los segmentos interceptados en los ejes OX y OY por la normal son

$$\begin{cases} \overline{ON} = \overline{OM} + \overline{MN} = x + y \operatorname{tg}(\theta) = x + yy' \\ \overline{OU} = \overline{OH} + \overline{HU} = y + x \operatorname{tg}(\phi) = y + x \operatorname{tg}(\pi/2 - \theta) = y + x/y' \end{cases}$$

Derivadas laterales

Se dice que f es **derivable por la izquierda en** a si existe el límite:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

El valor de dicho límite se llama la **derivada por la izquierda** de f en a.

Se dice que f es **derivable por la derecha en** a, si existe el límite:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

El valor de dicho límite se llama la **derivada por la derecha** de f en a.

Relación entre la derivada y las derivadas laterales

- Si $a = \max I$, entonces la derivabilidad de f en a es lo mismo que la derivabilidad por la izquierda de f en a.
- Si $a = \min I$, entonces la derivabilidad de f en a es lo mismo que la derivabilidad por la derecha de f en a.
- Si a no es un extremo de I, entonces equivalen las afirmaciones:
  - $\diamondsuit$ f es derivable en a.
  - $\diamondsuit$ Las derivadas por la izquierda y por la derecha de f en a existen y coinciden.

Derivadas de sumas, productos y cocientes

La funciones suma, $f+g$, y producto, fg, son derivables en todo punto $a \in I$ en el que f y g sean derivables, y las derivadas respectivas vienen dadas por:

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a); \quad (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

La función cociente f/g es derivable en todo punto $a \in I$ en el que f y g sean derivables, en cuyo caso se verifica que:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

Las funciones polinómicas son derivables en todo punto y las funciones racionales son derivables en todo punto de su conjunto natural de definición.

Derivación de una función compuesta o regla de la cadena

Sean $f : I \to \mathbb{R}$ y $g : J \to \mathbb{R}$ con $f(I) \subset J$, y sea $h = g \circ f$ la función compuesta. Supongamos que f es derivable en $a \in I$ y que g es derivable en $f(a)$. Entonces h es derivable en a y $h'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

En particular, si g es derivable en J, la función compuesta $h = g \circ f$ es derivable en todo punto de I donde f sea derivable.

La regla práctica es que una composición de funciones se deriva de forma inversa a como se evalúa.

$$(u \circ v \circ w)'(x) = u'(v(w(x))v'(w(x))w'(x)$$

Derivadas de la exponencial y del logaritmo

$$(\exp)'(x) = \exp x \ \ (\forall x \in \mathbb{R}), \quad (\log)'(x) = \frac{1}{x} \ \ (\forall x \in \mathbb{R}^+)$$

En particular, se verifica que:

$$\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e}$$

Criterio de equivalencia logarítmica

Este resultado es muy útil y permite resolver en muchos casos las indeterminaciones "1^∞" y "0∞".

Supongamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$. Entonces se verifica que:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^L \iff \lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1) = L}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = +\infty \iff \lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1) = +\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 0 \iff \lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1) = -\infty}$$

Derivación logarítmica

Una función positiva g es derivable en a si, y sólo si, la función $\varphi(x) = \log(g(x))$ es derivable en a en cuyo caso:

$$g'(a) = \varphi'(a)g(a)$$

Una función f es derivable en a si, y sólo si, la función $h(x) = \exp(f(x))$ es derivable en a en cuyo caso:

$$f'(a) = h'(a)\exp(-f(a))$$

Derivada de una función de la forma $f(x)^{g(x)}$

Si f y g son derivables la función $\psi(x) = g(x)^{f(x)}$ también es derivable. Derivando la función

$$\log(\psi(x)) = f(x)\log(g(x))$$

se obtiene:

$$\boxed{\psi'(x) = \psi(x)\left(\log(g(x))f'(x) + f(x)\frac{g'(x)}{g(x)}\right)}$$

Derivabilidad de las funciones trigonométricas

Las funciones seno y coseno son derivables en todo punto verificándose que:

$$\operatorname{sen}'(x) = \cos x \qquad \cos'(x) = -\operatorname{sen} x.$$

En particular, se verifica que:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.}$$

Las derivadas de las demás funciones trigonométricas se deducen con facilidad a partir de las derivadas del seno y del coseno.

Derivabilidad de las funciones hiperbólicas

Se comprueba sin dificultad que

$$\operatorname{senh}'(x) = \cosh x, \quad \cosh'(x) = \operatorname{senh} x$$

Las derivadas de las demás funciones hiperbólicas se deducen con facilidad a partir de las derivadas del seno hiperbólico y del coseno hiperbólico.

Las derivadas de las funciones hiperbólicas inversas son muy útiles para calcular primitivas de funciones en las que intervienen raíces cuadradas de trinomios de segundo grado.

$\operatorname{argsenh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$	$\operatorname{argsenh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\operatorname{argcosh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \quad x > 1$	$\operatorname{argcosh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{argcosech}(x) = \operatorname{argsenh}\left(\dfrac{1}{x}\right) \quad x \neq 0$	$\operatorname{argcosech}'(x) = \dfrac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2+1}}$
$\operatorname{argsech}(x) = \operatorname{argcosh}\left(\dfrac{1}{x}\right) \quad 0 < x < 1$	$\operatorname{argsech}'(x) = \dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$

Extremos relativos

Dada una función cualquiera $f : I \to \mathbb{R}$, se dice que f tiene en un punto $a \in I$ un *máximo relativo* si se cumplen las dos condiciones siguientes:

1) Hay algún número $r > 0$ tal que $]a - r, a + r[\subset I$.

2) Para todo $x \in]a - r, a + r[$ se verifica que $f(x) \leqslant f(a)$.

Análogamente se define el concepto de *"mínimo relativo"*.

La expresión *extremo relativo* se utiliza para referirse indistintamente a un máximo o a un mínimo relativo.

Condición necesaria de extremo relativo

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ y supongamos que f tiene un extremo relativo en a y que f *es derivable en* a. Entonces se verifica que $f'(a) = 0$.

El resultado anterior es uno de los que peor se interpretan debido a que suelen olvidarse sus hipótesis, que son dos:

- Que el punto a sea un extremo relativo de f.
- Que f sea derivable en a.

La expresión “como f tiene un extremo en a, su derivada debe anularse en a” no es, en general, correcta. Los siguientes ejemplos lo dejan bien claro:

La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=|x|$, tiene claramente un mínimo relativo (y también absoluto) en 0, pero no es derivable en 0, por lo que no tiene ningún sentido decir que su derivada se anula en 0.

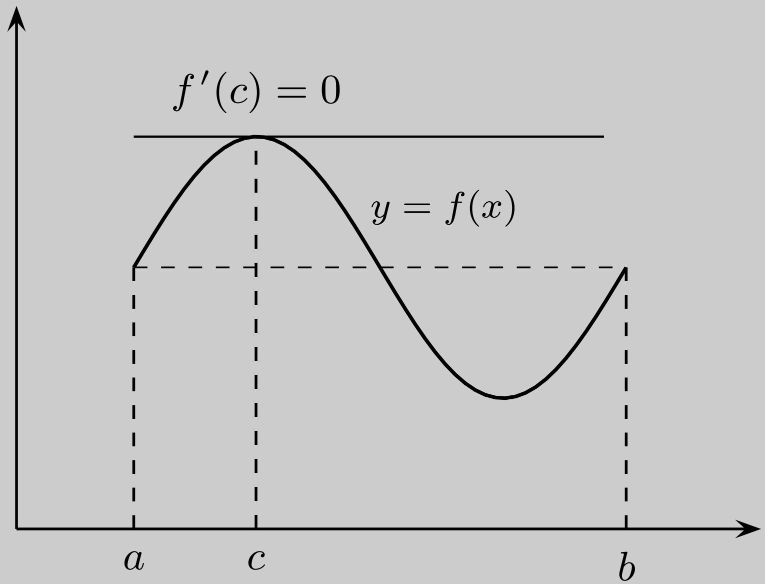
La función $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^3$, es estrictamente creciente, es derivable en todo punto y su derivada solamente se anula en $x=0$. Tiene un mínimo absoluto en -1 y un máximo absoluto en 1; dichos puntos no son extremos relativos de la función. Este ejemplo también muestra que la condición necesaria de extremo relativo no es suficiente.

Los puntos en los que se anula la derivada de una función se llaman **puntos críticos** o **puntos singulares** de dicha función.

Teorema de Rolle

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$ y verificando que $f(a) = f(b)$. Entonces existe algún punto $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Una función continua en un intervalo cerrado y acotado que toma igual valor en los extremos del mismo, y es derivable en todos los puntos del correspondiente intervalo abierto, tiene algún punto crítico en dicho intervalo abierto.



Teorema de Rolle

Determinación de ceros de una función

El teorema de Rolle se usa para estudiar raíces de ecuaciones.

a) *Entre cada dos ceros de una función derivable en un intervalo hay por lo menos un cero de su derivada.*

b) *Entre cada dos ceros* **consecutivos** *de la derivada de una función en un intervalo, solamente puede haber, como mucho, un cero de la función; o puede que la función no tenga ningún cero entre los dos ceros de su derivada.*

El apartado b) suele expresarse diciendo que *los ceros de la derivada separan los ceros de la función*.

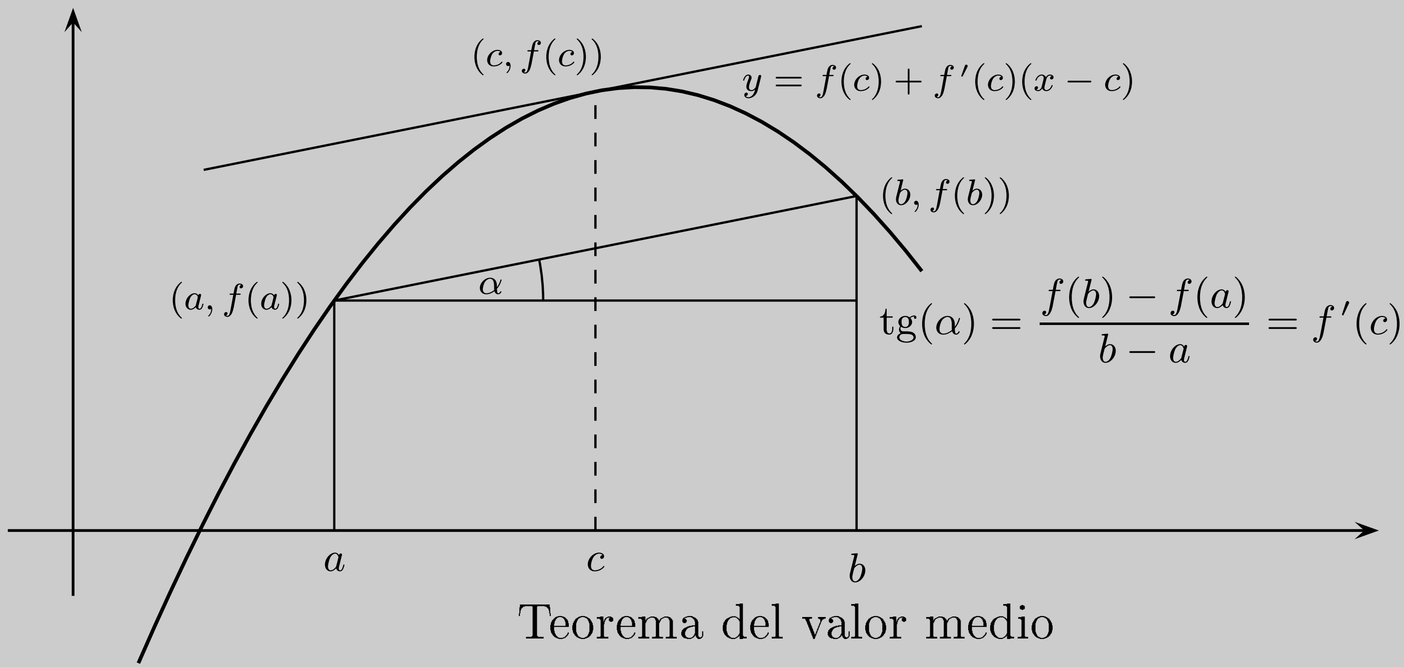
En consecuencia, si la derivada de una función en un intervalo tiene exactamente k ceros, la función tiene ***como mucho*** $k+1$ ceros en dicho intervalo.

Teorema del valor medio

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$. Entonces existe algún punto $c \in]a,b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La tasa de variación promedio de una función derivable en un intervalo es igual a la tasa de variación instantánea en algún punto de dicho intervalo.



Teorema del valor medio

Consecuencias del teorema del valor medio

Sea f una función derivable en un intervalo I, y supongamos que existe $M \geqslant 0$ tal que $|f'(x)| \leqslant M$ para todo $x \in I$. Entonces se verifica que

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y| \qquad \text{para todos } x, y \in I$$

En particular, si $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$ entonces f es constante en I.

Consecuencias del teorema del valor medio

Sea I un intervalo, $a \in I$ y f una función continua en I y derivable en $I \setminus \{a\}$. Si la función derivada f' tiene límite por la derecha (resp. por la izquierda) en a entonces f es derivable por la derecha (resp. por la izquierda) en a con derivada por la derecha (resp. por la izquierda) en a igual al valor de dicho límite. En particular, si existe $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = L$ entonces f es derivable en a y $f'(a) = L$.

Las funciones derivadas definidas en intervalos no tienen discontinuidades evitables ni de salto.

Derivabilidad y monotonía

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en todo punto del intervalo I con la posible excepción de los puntos extremos de I. Se verifica entonces que f es creciente (resp. decreciente) en I si, y sólo si, $f'(x) \geqslant 0$ (resp. $f'(x) \leqslant 0$) para todo $x \in I$.

Este resultado es muy útil para probar desigualdades entre funciones. Muchos problemas de desigualdades responden al siguiente esquema.

Criterio de extremo absoluto

Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en todo punto de $]a,b[$ con la posible excepción de un punto $c \in]a,b[$.

a) Si $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in]a,c[$ y $f'(x) \leqslant 0$ para todo $x \in]c,b[$, entonces f alcanza en c un máximo absoluto en $[a,b]$.

b) Si $f'(x) \leqslant 0$ para todo $x \in]a,c[$ y $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in]c,b[$, entonces f alcanza en c un mínimo absoluto en $[a,b]$.

Propiedad del valor intermedio para derivadas

Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en el intervalo I con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Se verifica entonces una de las dos afirmaciones siguientes:

- f es estrictamente creciente y $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$.
- f es estrictamente decreciente y $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$.

Derivación de la función inversa

Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en el intervalo I con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Entonces f es una biyección de I sobre el intervalo $J = f(I)$, y la función inversa $f^{-1} : J \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en J siendo para todo $y \in J$:

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}}$$

La fórmula anterior se recuerda sin más que derivar la identidad:

$$\boxed{\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y}$$

Como ejemplo podemos calcular las derivadas de las funciones trigonométricas "inversas".

Reglas de L'Hôpital

Sean $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, f y g funciones derivables en $]a,b[$ con $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in]a,b[$. Sea $\alpha \in \{a,b\}$ y supongamos que se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$

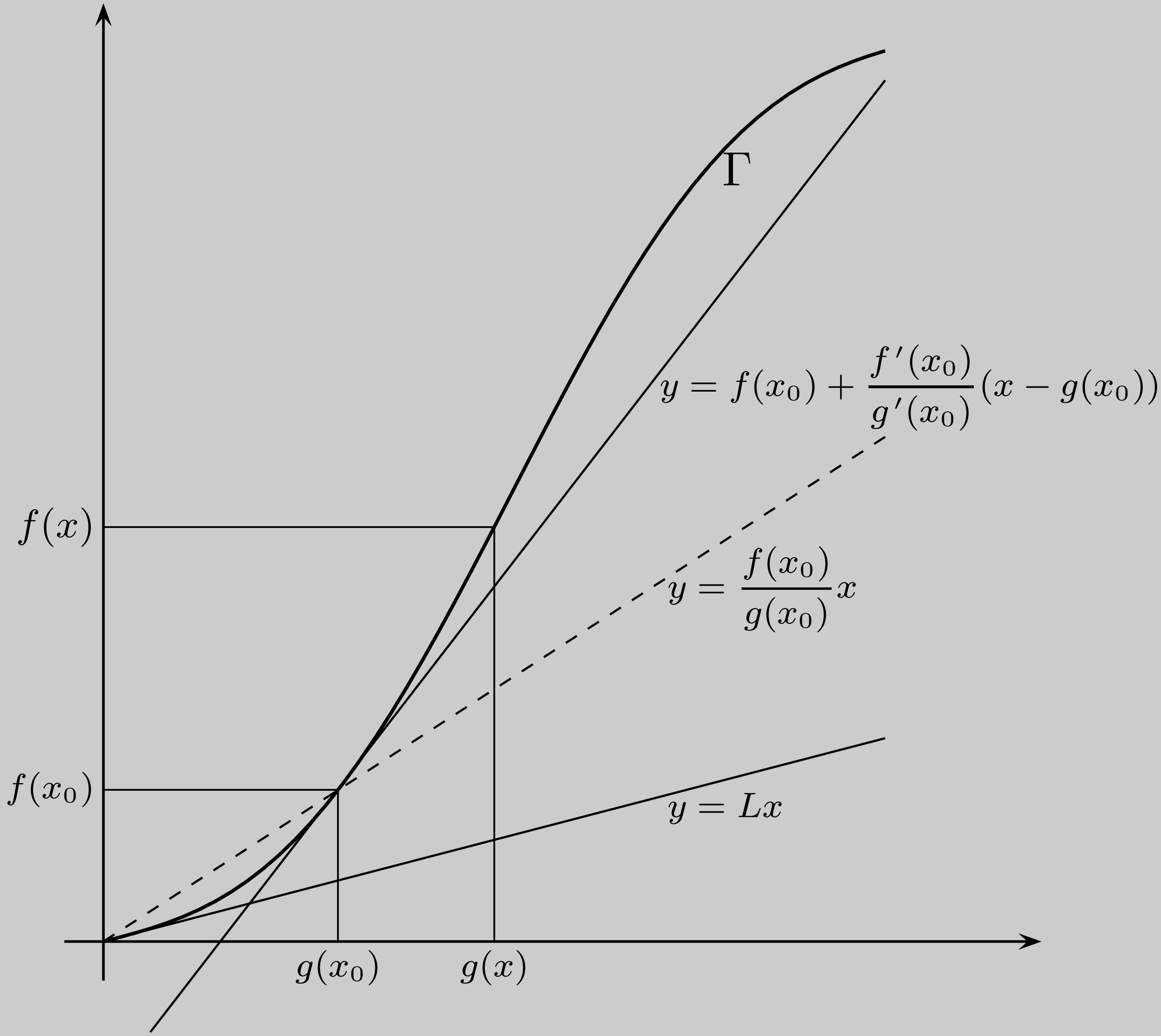
b) $\lim\limits_{x\to\alpha} |g(x)| = +\infty$

Y además

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

Entonces se verifica que

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$



Regla de L'Hôpital

Derivadas sucesivas

Sea f una función derivable en un intervalo I. Si la función derivada f' también es derivable en I decimos que f es *dos veces derivable* en I y la función $f'' := (f')'$ se llama ***derivada segunda*** de f en I. En general, si $n \in \mathbb{N}$, decimos que f es $n+1$ *veces derivable* en I si f es n veces derivable en I y la función derivada de orden n de f en I, que representaremos por $f^{(n)}$, es derivable en I; en cuyo caso la función $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ se llama *derivada de orden* $n+1$ de f en I.

Si n es un número natural, $n \geqslant 2$, decimos que f es *n veces derivable en un punto $a \in I$*, si f es $n-1$ veces derivable en I y la función $f^{(n-1)}$ es derivable en a. Se dice que f es una función de clase C^n en I si f es n veces derivable I y la función $f^{(n)}$ es continua en I. Se dice que f es una función de clase C^∞ en I si f tiene derivadas de todos órdenes en I. Por convenio se define $f^{(0)} = f$.

Polinomios de Taylor

Sea f una función n veces derivable en un punto a. La función polinómica $T_n(f,a)$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por

$$\boxed{T_n(f,a)(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}$$

se llama el **polinomio de Taylor de orden n de f en a**.

Teorema de Taylor-Young

Sea f una función n veces derivable en un punto a, y sea $T_n(f,a)$ el polinomio de Taylor de orden n de f en a. Entonces se verifica que:

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-T_n(f,a)(x)}{(x-a)^n}=0}$$

Sea f una función definida en un intervalo I que es $n+1$ veces derivable en un punto $a\in I$, y sea $T_n(f,a)$ el polinomio de Taylor de orden n de f en a. Entonces se verifica que:

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-T_n(f,a)(x)}{(x-a)^{n+1}}=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a)}$$

Notación de Landau

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones tales que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, se escribe $f(x) = o(g(x))$ cuando $x \to a$, y se lee $f(x)$ *es un infinitésimo de orden superior que* $g(x)$ *en el punto* a.

Lo interesante de esta notación es que:

$$\varphi(x) = o(x-a)^p,\ \psi(x) = o(x-a)^q \Longrightarrow \varphi(x)\psi(x) = o(x-a)^{p+q}$$

$$p > q \Longrightarrow \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = o(x-a)^{p-q}, \quad \text{y} \quad (\varphi(x) + \psi(x)) = o(x-a)^q$$

Usando la notación de Landau, el teorema de Taylor–Young puede expresarse en la forma:

$$\boxed{f(x) = T_n(f,a)(x) + o(x-a)^n}$$

Esta última igualdad suele llamarse en algunos textos *Teorema de Taylor con resto infinitesimal* o *forma infinitesimal del resto de Taylor*. No es otra cosa que el teorema de Taylor–Young escrito con la notación de Landau.

Polinomios de Taylor de una función y de su derivada

Entre los polinomios de Taylor de una función φ y de su derivada φ' hay la siguiente relación:

$$\boxed{\frac{d}{dx}T_{n+1}(\varphi,a)(x) = T_n(\varphi',a)(x)}$$

Es decir, la derivada del polinomio de Taylor de orden $n+1$ de φ es el polinomio de Taylor de orden n de φ'.

La igualdad anterior es interesante *en los dos sentidos* pues permite calcular $T_{n+1}(\varphi,a)(x)$ sin más que calcular *la primitiva o antiderivada* de $T_n(\varphi',a)(x)$ que en el punto a coincida con $\varphi(a)$.

Polinomios de Taylor de las funciones elementales

$$e^x = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} x^k + o(x^n)$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} + o(x^{2n})$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(x^n)$$

Polinomios de Taylor de las funciones elementales

$$\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} x^{2k-1} + o(x^{2n})$$

$$\operatorname{arc\,sen} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

Técnicas para calcular límites de funciones

Cuando en un ejercicio te piden calcular un límite, es casi seguro que se trata de una *"indeterminación"*. Eso quiere decir simplemente que se trata de límites cuyo cálculo no puedes hacerlo aplicando las reglas básicas del *"álgebra de límites"* y tienes que usar alguna técnica apropiada para calcularlos. Los límites *interesantes* son casi siempre de este tipo.

Técnicas para calcular límites de funciones

Voy a contarte las estrategias que suelo usar para calcular límites. Esencialmente, puedo resumirlas en dos:

- **Trato de reducir el límite a otros bien conocidos.**
- **Siempre que puedo sustituyo funciones por otras más sencillas.**

Límites que debes saberte de memoria

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,sen} x}{x}=1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}=\frac{1}{6} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x^3}=\frac{1}{3}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x-\log(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Aquí están casi todos los límites que vienen en los libros

Sea f cualquier función tal que $f(x) \neq 0$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$. Entonces se verifica que:

$$\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{sen} f(x)}{f(x)} = 1, \qquad \lim_{x\to a} \frac{\operatorname{arc\,sen} f(x)}{f(x)} = 1, \qquad \lim_{x\to a} \frac{1-\cos f(x)}{f(x)^2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to a} \frac{e^{f(x)}-1}{f(x)} = 1, \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x)-\operatorname{sen} f(x)}{f(x)^3} = \frac{1}{6}, \qquad \lim_{x\to a} \frac{(1+f(x))^{\alpha}-1}{f(x)} = \alpha,$$

$$\lim_{x\to a} \frac{\log(1+f(x))}{f(x)} = 1, \qquad \lim_{x\to a} \frac{\operatorname{tg} f(x)}{f(x)} = 1, \qquad \lim_{x\to a} \frac{\operatorname{arc\,tg} f(x)}{f(x)} = 1,$$

$$\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{tg} f(x)-f(x)}{f(x)^3} = \frac{1}{3}, \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x)-\log(1+f(x))}{f(x)^2} = \frac{1}{2}.$$

Vamos a la segunda estrategia. *Sustituir funciones por otras más sencillas*. Esto se basa en las ***equivalencias asintóticas*** que permiten sustituir en un **producto** o en un **cociente** de funciones, una de ellas por otra asintóticamente equivalente. ¡Ojo! En una suma no puedes, en general, hacer eso.

La lista de los límites *bien conocidos* es, de hecho, una lista de equivalencias asintóticas y eso la hace más útil todavía.

Sobre el mal uso de las reglas de L'Hôpital

No conviene aplicar las reglas de L'Hôpital para calcular derivadas, es decir, límites de la forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

La razón es muy sencilla. Si para calcular el límite anterior usas las reglas de L'Hôpital, lo que haces es calcular el límite $\lim\limits_{x \to a} f'(x)$. Si éste límite es igual a L deducimos que el anterior también es igual a L. Pero ¡has probado más de lo que se pedía! Acabas de probar que la derivada de f es continua en a, porque has probado que $\lim_{x \to a} f'(x) = L = f'(a)$; y lo que se pedía era solamente calcular la derivada de f en a.

Los errores más frecuentes al aplicar L'Hôpital se deben a que **no se comprueban las hipótesis cada vez que aplicamos las reglas**. Es frecuente empezar con una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ y, después de aplicar L'Hôpital una vez, no volver a comprobar que seguimos teniendo una indeterminación. Así que no lo olvides: cada vez que apliques L'Hôpital comprueba que se trata de una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ y que la derivada del denominador no se anula.

Sobre el uso de la notación $\lim\limits_{x\to a}$

La notación que usamos para límites es tan buena que a veces te hace ver lo que no hay. En cierto sentido la notación "tira de ti": basta con que escribas "$\lim\limits_{x\to a}$" delante de una función para que *mentalmente hagas la sustitución* $x = a$.

Para comprobar esto te propongo un juego: dime en menos de medio segundo el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x}$$

¿Has dudado? ¿Has creído que es una indeterminación tipo $\frac{0}{0}$? Si respondes que sí a estas preguntas es porque has hecho mentalmente la sustitución $x = 0$ en el cociente $\frac{x}{x}$ y has visto lo que no hay. Porque, evidentemente, se tiene que $\frac{x}{x} = 1$, es decir, el límite anterior es el límite de la función constante igual a 1. No hay ninguna indeterminación. Es un límite trivial.

Lo mismo pasa con el siguiente límite $\lim_{x\to+\infty} 1^x$. Si te dejas llevar por la notación y haces mentalmente la sustitución $x = +\infty$, puedes creer que se trata de una indeterminación 1^∞, cuando no lo es porque, evidentemente, $1^x = 1$ es la función constante igual a 1. Se pueden poner muchos más ejemplos.

¿Cómo evitar que la notación "$\lim\limits_{x\to a}$" "tire de ti" y te lleve a ver lo que no hay? Pues no usándola hasta que no hayas visto claramente lo que realmente hay. Este es un consejo importante: ***antes de empezar a calcular un límite funcional, simplifica todo lo que puedas la función y no escribas el símbolo*** "lím" ***hasta que no tengas una idea clara de cómo vas a hacer los cálculos.***

Condiciones suficientes de extremo relativo

Sean I un intervalo, a un punto de I que no es extremo de I y $f : I \to \mathbb{R}$ una función $n \geqslant 2$ veces derivable en a. Supongamos que todas las derivadas de f hasta la de orden $n-1$ inclusive se anulan en a, es decir, $f^{(k)}(a) = 0$ para $k = 1, 2, \ldots, n-1$, y que $f^{(n)}(a) \neq 0$. Entonces:

i) Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$, f tiene un mínimo relativo en a.

ii) Si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$, f tiene un máximo relativo en a.

iii) Si n es impar entonces f no tiene extremo relativo en a.

Hay que insistir en que este resultado es útil para estudiar extremos relativos pero que ***no proporciona condiciones suficientes de extremo absoluto***. Puede enunciarse un criterio de extremo absoluto para la derivada segunda como sigue.

Criterio de extremo absoluto usando la derivada segunda

Supongamos que f es continua en $[a,b]$, dos veces derivable en $]a,b[$ y *tiene un punto crítico en* $c \in]a,b[$. Entonces:

a) Si $f''(x) \leqslant 0$ para todo $x \in]a,b[$ se verifica que f alcanza en c un máximo absoluto en $[a,b]$.

b) Si $f''(x) \geqslant 0$ para todo $x \in]a,b[$ se verifica que f alcanza en c un mínimo absoluto en $[a,b]$.

Teorema de Taylor

Sea f una función $n+1$ veces derivable en un intervalo I. Dados dos puntos cualesquiera x, a en I con $x \neq a$, se verifica que existe algún punto c en el intervalo abierto de extremos a y x tal que:

$$\boxed{f(x) - T_n(f,a)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}$$

Resto de Lagrange

El número

$$\boxed{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}$$

Se llama **resto de Lagrange**. Si somos capaces de probar una desigualdad de la forma

$$\frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \leqslant \varepsilon$$

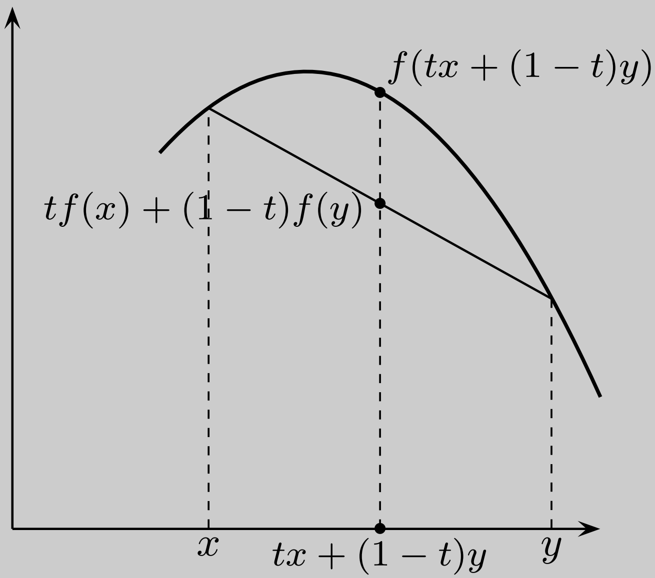
Entonces podemos asegurar que el error cometido al aproximar $f(x)$ por $T_n(f,a)(x)$ es menor que ε.

Funciones convexas y funciones cóncavas

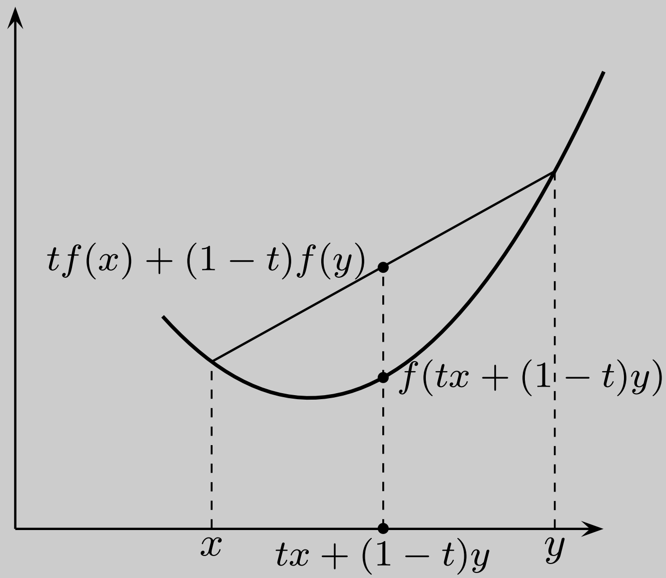
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I. Se dice que f es *convexa* en I si para todo par de puntos $x, y \in I$ y para todo t con $0 \leqslant t \leqslant 1$, se verifica que:

$$f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$$

Cuando la desigualdad anterior es estricta para $0 < t < 1$ se dice que f es *estrictamente convexa*. Se dice que f es *cóncava* en I cuando $-f$ es convexa en I y *estrictamente cóncava* cuando $-f$ es estrictamente convexa.



Función cóncava



Función convexa

Condiciones suficientes de convexidad

Supongamos que f es continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$. Si la derivada de f es creciente (resp. estrictamente creciente) en $]a,b[$ entonces f es convexa (resp. estrictamente convexa) en $[a,b]$. En particular si f es dos veces derivable en $]a,b[$ y se verifica que $f''(x) \geqslant 0$ (resp. $f''(x) > 0$) para todo $x \in]a,b[$, entonces f es convexa (resp. estrictamente convexa) en $[a,b]$.

Interpretando la derivada primera como la velocidad y la derivada segunda como la aceleración, las curvas convexas aceleran y las cóncavas frenan.

Puntos de inflexión

Se dice que a es un **punto de inflexión** de una función f, si hay un número $r > 0$ tal que f es cóncava en el intervalo $]a-r, a[$ y f es convexa en el intervalo $]a, a+r[$ (o al revés). Es decir, los puntos en los que una función pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava se llaman puntos de inflexión.

Puntos de inflexión: condiciones necesarias y suficientes

Condición necesaria:

Si f tiene un punto de inflexión en a y es dos veces derivable en a, entonces $f''(a) = 0$.

Condición suficiente:

Si f es tres veces derivable en un punto a y se tiene que $f''(a) = 0$ y $f'''(a) \neq 0$, entonces f tiene un punto de inflexión en a.